解析学２　解答例

2019.04.08

■　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 3; \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を調べよ．

（解）方程式 $x = \sqrt{x+2}$ の実数解 $x = 2$ を用いて，

$$|\, a_{n+1} - 2 \,| = \left|\, \sqrt{a_n + 2} - 2 \,\right| = \frac{|\, a_n - 2 \,|}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \le \frac{|\, a_n - 2 \,|}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

が得られる．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，上記の不等式を帰納的に用いて

$$|\, a_n - 2 \,| \le \frac{1}{2}\ |\, a_{n-1} - 2 \,| \le \frac{1}{2^2}\ |\, a_{n-2} - 2 \,| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}}\ |\, a_1 - 2 \,| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

が得られ，

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} \le a_n \le 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$$

となる．はさみうちの原理と

$$\lim_{n\to\infty} \left(2 \pm \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2$$

により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

である．■