

■ 次の問いに答えよ.

(1) 実数 x が性質

$$\forall \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon$$

をみたすとき, x の値を調べよ.

(2) n を自然数, x および y を 0 でない実数とすると, 二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

が成り立つことを示せ.

(解) (1): $x \neq 0$ と仮定する. $\varepsilon = |x|/2 > 0$ とおくと, $|x| > |x|/2 = \varepsilon$ となり, 性質に矛盾する. したがって, $x = 0$ である.

(2): 示すべき関係式を (E) と表す. (a) $n = 1$ のとき,

$$(\text{左辺}) = (x+y)^1 = x+y, \quad (\text{右辺}) = {}_1C_0 x^0 y^{1-0} + {}_1C_1 x^1 y^{1-1} = x+y$$

より (E) が成り立つ. (b) $n = \ell$ のとき (E) が成り立つと仮定する. ここで, すべての整数 $0 \leq k < n$ に対して

$$\begin{aligned} {}_nC_k + {}_nC_{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n! \{(k+1) + (n-k)\}}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \{(n+1) - (k+1)\}!} = {}_{n+1}C_{k+1} \end{aligned}$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} (x+y)^{\ell+1} &= (x+y)(x+y)^\ell = (x+y) \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k x^k y^{\ell-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k x^{k+1} y^{\ell-k} + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k x^k y^{\ell+1-k} = \sum_{j=1}^{\ell+1} {}_{\ell}C_{j-1} x^j y^{\ell+1-j} + \sum_{k=0}^{\ell} {}_{\ell}C_k x^k y^{\ell+1-k} \\ &= {}_{\ell}C_{\ell} x^{\ell+1} y^{\ell+1-(\ell+1)} + \sum_{j=1}^{\ell} ({}_{\ell}C_{j-1} + {}_{\ell}C_j) x^j y^{\ell+1-j} + {}_{\ell}C_0 x^0 y^{\ell+1-0} \\ &= {}_{\ell+1}C_{\ell+1} x^{\ell+1} y^{\ell+1-(\ell+1)} + \sum_{j=1}^{\ell} {}_{\ell+1}C_j x^j y^{\ell+1-j} + {}_{\ell+1}C_0 x^0 y^{\ell+1-0} = \sum_{k=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}C_k x^k y^{\ell+1-k} \end{aligned}$$

が得られ, $n = \ell + 1$ のときも (E) が成り立つ. 数学的帰納法により, すべての自然数 n に対して (E) が成り立つ. ■