解析学２　解答例

2019.04.22

■　定数 r が $0 < r < 1$ をみたすとき $\lim_{n \to \infty} (n \cdot r^n) = 0$ が成り立つことを示せ．

（解）R を $R = \dfrac{1}{r} - 1$ とおくと，$R > 0$ であり，$n \geq 2$ のとき

$$\frac{1}{r^n} = (1+R)^n > {}_nC_2\, R^2 = \frac{R^2\, n\,(n-1)}{2}$$

より

$$0 < n \cdot r^n < n \cdot \frac{2}{R^2\, n\,(n-1)} = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{n-1}$$

が得られる．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．アルキメデスの原理（$x = \varepsilon$，$y = 2/R^2$）を適用すると，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が取れて，

$$\frac{2}{R^2} < n_1\, \varepsilon$$

が成り立つ．$n_0 = \max(2, n_1 + 1)$ とおくと，すべての自然数 $n \geq n_0$ に対して，

$$n - 1 \geq n_0 - 1 \geq (n_1 + 1) - 1 = n_1 \geq 1$$

より

$$-\varepsilon < 0 < n \cdot r^n < \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{n-1} \leq \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{n_1} < \varepsilon, \qquad \text{つまり，} \quad |\, n \cdot r^n - 0\,| < \varepsilon$$

が成り立つ．極限の定義より $\lim_{n \to \infty} (n \cdot r^n) = 0$ が成り立つ．■