解析学２　解答例

2019.05.13

■　三角不等式

$$||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$

を (1) 実数の範囲および (2) 複素数の範囲で証明せよ．

（解） (1) すべての $z \in \mathbb{R}$ に対して $z \leq |z|$ が成り立つことに注意したい．

$$(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2\,|x|\,|y| - 2\,x\,y = 2\,(|x\,y| - x\,y) \geq 0$$

より $|x+y| \leq |x|+|y|$ が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}
|x| &= |(x+y)+(-y)| \leq |x+y|+|-y| = |x+y|+|y|, \\
|y| &= |(x+y)+(-x)| \leq |x+y|+|-x| = |x+y|+|x|
\end{aligned}$$

より

$$|x+y| \geq |x|-|y| \qquad \text{かつ} \qquad |x+y| \geq |y|-|x|$$

となり，$||x|-|y|| \leq |x+y|$ である．

(2) $|x+y| \leq |x|+|y|$ が示されていれば，$||x|-|y|| \leq |x+y|$ の証明は実数の場合と同様である．したがって，$|x+y| \leq |x|+|y|$ についてのみ示せばよい．

$$|z|^2 = z\,\overline{z} = |\overline{z}|^2, \qquad z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z, \qquad |\mathrm{Re}\,z| \leq |z|$$

より

$$\begin{aligned}
(|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 &= |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 - (x+y)\,\overline{(x+y)} \\
&= |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 - (x+y)\,(\overline{x}+\overline{y}) \\
&= 2\,|x|\,|\overline{y}| - x\,\overline{y} - y\,\overline{x} = 2\,|x\,\overline{y}| - \left(x\,\overline{y} + \overline{x\,\overline{y}}\right) = 2\,(|x\,\overline{y}| - \mathrm{Re}\,x\,\overline{y}) \geq 0
\end{aligned}$$

となる．したがって，$|x+y| \leq |x|+|y|$ が成り立つ．■