解析学２　解答例

2019.05.20

■　実数 p，q が

$$p > 1, \qquad q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

をみたすとき，すべての非負な実数 x，y に対して不等式

$$x\,y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

が成り立つことを示せ.

（解） p と q の関係式により

$$q = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$$

であることに注意したい．$y \geq 0$ を任意に取り固定し，

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - x\,y$$

とおく．$f'(x) = x^{p-1} - y$ より下記の増減表が得られる.

x	0	$\cdots$	$y^{1/(p-1)}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	y^q/q	$\searrow$	$f(y^{1/(p-1)})$	$\nearrow$

したがって，$x \geq 0$ の範囲での $f(x)$ の最小値は $x = y^{1/(p-1)}$ で取り，

$$f(y^{1/(p-1)}) = \frac{y^{p/(p-1)}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{1+1/(p-1)} = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^q = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)\,y^q = 0$$

であるから，$x \geq 0$ の範囲での $f(x)$ の最小値は 0 である．$y \geq 0$ は任意であるから，すべての非負な実数 x，y に対して不等式

$$x\,y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

が成り立つ．■