解析学２　解答例

2019.05.27

■　次の問いに答えよ．

(1) 実数 x，y に対して関数 $d(x,y)$ を $d(x,y) = \dfrac{|\,x-y\,|}{1+|\,x-y\,|}$ とするとき，任意の x，y，z に対して

$$\begin{aligned}
&\text{(D1)} \quad d(x,y) \geq 0\,;\ d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y \\
&\text{(D2)} \quad d(x,y) = d(y,x) \\
&\text{(D3)} \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 関係式 $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \|\,\boldsymbol{x}\,\|_p = 1$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を図示せよ．

（解） (1) 関数 $d(x,y)$ の定義より，(D1)，(D2) が成り立つことは明らかであるから，(D3) のみ示せばよい．関数 $f(x) = x/(1+x)$ が $x \geq 0$ において単調増加であり，三角不等式 $|\,x-z\,| \leq |\,x-y\,| + |\,y-z\,|$ が成り立つことから，

$$\begin{aligned}
d(x,z) = \frac{|\,x-z\,|}{1+|\,x-z\,|} &\leq \frac{|\,x-y\,|+|\,y-z\,|}{1+|\,x-y\,|+|\,y-z\,|} = \frac{|\,x-y\,|}{1+|\,x-y\,|+|\,y-z\,|} + \frac{|\,y-z\,|}{1+|\,x-y\,|+|\,y-z\,|} \\
&\leq \frac{|\,x-y\,|}{1+|\,x-y\,|} + \frac{|\,y-z\,|}{1+|\,y-z\,|} = d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}$$

が得られ，(D3) が成り立つ．

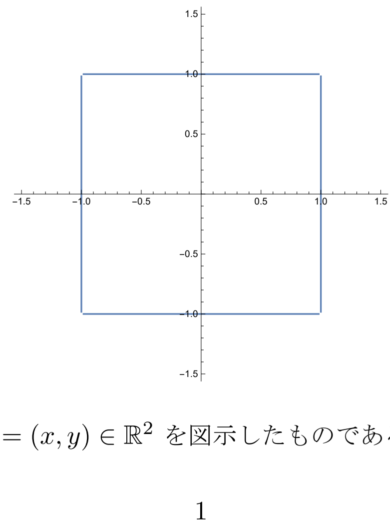
(2) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $M = \max(|\,x_1\,|, |\,x_2\,|, \cdots, |\,x_n\,|)$ とすると，

$$M^p \leq \sum_{k=1}^{n} |\,x_k\,|^p \leq n\,M^p, \qquad \text{つまり，} \quad M \leq \|\,\boldsymbol{x}\,\|_p \leq n^{1/p}\,M$$

が成り立つ．$\lim_{p\to+\infty} n^{1/p} = 1$ と挟み撃ちの原理により

$$\lim_{p\to+\infty} \|\,\boldsymbol{x}\,\|_p = M = \max(|\,x_1\,|, |\,x_2\,|, \cdots, |\,x_n\,|)$$

が得られる．



上図は与えられた関係式をみたす $\boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ を図示したものである．■