解析学２　解答例

2019.06.03

■　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

により定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n! \geq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) a_n は

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

と表せることを示せ．

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq 3$ が成り立つことを示せ．

（解） (1) $n!$ は 1 から n までの整数の積であり，2 以上の項を 2 で置き換えることにより

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot\cdots\cdot (n-1) \cdot n \geq 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot\cdots\cdot 2 \cdot 2}_{(n-1)\text{ 個}} = 2^{n-1}$$

となる．(2) 二項定理より

$$\begin{aligned}
a_n =& \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
=& 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{{}_nC_k}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot\cdots\cdot (n-k+1)}{n^k \cdot k!} \\
=& 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

が得られる．(3) 問 (1)，(2) より

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(2^{-1}\right)^{k-1} = 1 + 1 \cdot \frac{1 - (2^{-1})^n}{1 - 2^{-1}} = 3 - 2^{1-n} < 3$$

となる．■