# 解析学２　解答例

2019.06.10

■　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \qquad a_2 = b,$$
$$a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，一般項 $a_n$ を求めよ．

**(解)**　特性方程式 $x^2 = 4\,x - 4$ の解は $x = 2$ （重解）である．

$$a_{n+2} - 2\,a_{n+1} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n - 2\,a_{n+1} = 2\,(a_{n+1} - 2\,a_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

より $\{\,a_{n+1} - 2\,a_n\,\}$ は公比 2 の等比数列であるから，

$$a_{n+1} - 2\,a_n = 2^{n-1}\,(a_2 - 2\,a_1) = 2^{n-1}\,(b - 2\,a), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

と表せる．$a_n = 2^n\,b_n$ とおくと，$b_1 = a/2$，

$$b_{n+1} - b_n = 2^{-n-1}\,(a_{n+1} - 2\,a_n) = 2^{-n-1} \cdot \{2^{n-1}\,(b - 2\,a)\} = \frac{b - 2\,a}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

より

$$b_n = \frac{a}{2} + \frac{(b - 2\,a)\,(n-1)}{4} = \frac{2\,a + (b - 2\,a)\,(n-1)}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

と表され，

$$a_n = 2^{n-2}\,\{2\,a + (b - 2\,a)\,(n-1)\}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

となる．■