解析学２　解答例

2019.06.17

■　次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が

$$b_k \le b_{k+1} \le c_{k+1} \le c_k, \qquad c_{k+1} - b_{k+1} = \frac{c_k - b_k}{2}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたすとき，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の極限を調べよ．

(2) $a \ge b \ge 0$ とする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b; \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

をみたすとき，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の極限を調べよ．

（解） (1) $\{b_n\}$ は単調増加かつ c_1 で上から評価でき，$\{c_n\}$ は単調減少かつ b_1 で下から評価できる．したがって，極限 $b = \lim_{n\to\infty} b_n$，$c = \lim_{n\to\infty} c_n$ が存在する．四則演算とその極限により

$$c - b = \lim_{n\to\infty}(c_{n+1} - b_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n - b_n}{2} = \frac{c - b}{2}$$

が成り立つので，$b = c$，つまり，$\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ の極限は存在し一致する．

(2) 数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $a_n \ge 0$，$b_n \ge 0$ が成り立つことが示せる．また，相加・相乗平均の関係式により，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ge \sqrt{a_n\, b_n} = b_{n+1}$$

が得られ，$a_1 = a \ge b = b_1$ であるから，すべての自然数 n に対して $a_n \ge b_n$ が成り立つ．さらに，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \le 0, \qquad b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\,(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) \ge 0, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

となるので，

$$b_1 \le b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n \le a_1, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

より $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列，$\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列である．したがって，極限 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$，$b = \lim_{n\to\infty} b_n$ が存在する．四則演算とその極限により

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a + b}{2}, \qquad \text{つまり，} \quad a = b$$

が得られる．したがって，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の極限は存在し一致する．■