

■ 関数 $f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) を

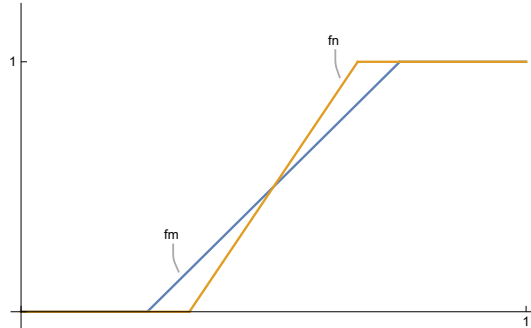
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) \\ \frac{n+1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) \\ 1 & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

により定義する. 自然数 n, m ($n \geq m$) に対して

$$d_1(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx, \quad d_\infty(f_n, f_m) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f_m(x)|$$

を求めよ.

(解) $y = f_n(x)$ と $y = f_m(x)$ のグラフは下図のようになる.



$d_1(f_n, f_m)$ は曲線 $y = f_n(x)$ と $y = f_m(x)$ で囲まれた図形の面積, $d_\infty(f_n, f_m)$ は 2 点 $(x, f_n(x))$ と $(x, f_m(x))$ の距離の $0 \leq x \leq 1$ における最大値であることに注意すると,

$$d_1(f_n, f_m) = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{n-m}{2(n+1)(m+1)},$$

$$d_\infty(f_n, f_m) = \max \left\{ f_m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right), 1 - f_m \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m+1}{n+1} \right)$$

が得られる. ■