解析学２　解答例

2019.07.01

■　微分の定義に従って，関数 $f(x) = |\,x\,|$ が $x = a \in \mathbb{R}$ で微分可能であるかどうか調べよ．

（解） (1) $a < 0$ の場合：$h \to 0$ のとき $a + h < 0$ を仮定しても良いので，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\{-(a+h)\} - (-a)}{h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1$$

となる．したがって，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であり，$f'(a) = -1$ である．

(2) $a > 0$ の場合：$h \to 0$ のとき $a + h > 0$ を仮定しても良いので，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h) - a}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

となる．したがって，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能であり，$f'(a) = 1$ である．

(3) $a = 0$ の場合：左極限および右極限はそれぞれ

$$\lim_{h\to -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{|\,h\,|}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to -0} (-1) = -1,$$
$$\lim_{h\to +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{|\,h\,|}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to +0} 1 = 1$$

となる．極限の取り方に依存するので，$f(x)$ は $x = a$ で微分可能ではない．■