解析学２　解答例

2019.07.08

■　次の問いに答えよ．

(1) すべての $x>0$ に対して不等式 $\log x \leq x-1$ が成り立つことを示せ．

(2) p，q をそれぞれ $0<p<1$，$0<q<1$ をみたす実数とする．不等式

$$p\,\log q+(1-p)\,\log(1-q) \leq p\,\log p+(1-p)\,\log(1-p)$$

が成り立つことを示せ．

（解） (1) $f(x)=\log x-(x-1)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}\begin{cases}>0 & (0<x<1)\\ =0 & (x=1)\\ <0 & (x>1)\end{cases}$$

より $f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)=\log 1-(1-1)=0$ をとる．したがって，すべての $x>0$ に対して不等式 $\log x \leq x-1$ が成り立つ．

(2) 前問題 (1) で示した不等式を用いると，

$$\begin{aligned}&\{p\,\log q+(1-p)\,\log(1-q)\}-\{p\,\log p+(1-p)\,\log(1-p)\}\\ &\quad = p\,\log\frac{q}{p}+(1-p)\,\log\frac{1-q}{1-p} \leq p\left(\frac{q}{p}-1\right)+(1-p)\left(\frac{1-q}{1-p}-1\right)=0\end{aligned}$$

が得られるので，示すべき不等式が成り立つ．■