解析学概論　課題　解答例

2020.12.21

$\boxed{1}$　次の問に答えよ．

(1) $0 \leq k < n$ をみたす自然数 k，n に対して ${}_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $0 \leq k \leq n$ をみたす自然数 k，n に対して ${}_nC_k$ は自然数であることを示せ．

(解) (1) ${}_nC_k$ の定義より

$$\begin{aligned}{}_nC_k + {}_nC_{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!\,\{(k+1)+(n-k)\}}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = {}_{n+1}C_{k+1}\end{aligned}$$

である．

(2) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，命題 P_n を

P_n: すべての整数 $0 \leq k \leq n$ に対して ${}_nC_k$ は自然数である

とする．(a) ${}_1C_0 = 1$，${}_1C_1 = 1$ より命題 P_1 が成り立つ．(b) 命題 P_n が成り立つ，つまり，すべての整数 $0 \leq k \leq n$ に対して ${}_nC_k$ が自然数であると仮定する．${}_nC_k$ の定義より ${}_{n+1}C_0 = 1$，${}_{n+1}C_{n+1} = 1$ が成り立つ．また，仮定と問 (1) より，すべての整数 $1 \leq k \leq n$ に対して

$${}_{n+1}C_k = {}_nC_{k-1} + {}_nC_k \in \mathbb{N}$$

となる．以上から，命題 P_{n+1} が成り立つ．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して命題 P_n が成り立つ．■