

解析学3 課題 解答例

2020.10.27

1 無限級数の和

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k^2}$$

の値を小数第4位まで正確に求め、その値の妥当性を述べよ。

(解) $0 \leq (k-3)^2 = k^2 - 6k + 9$ より

$$\sum_{k=5}^{\infty} 2^{-k^2} \leq \sum_{k=5}^{\infty} 2^{-6k+9} = \frac{2^{-21}}{1-2^{-6}} < 2^{-20} = \frac{1}{1048576} < \frac{1}{10^6}$$

が得られ、

$$\sum_{k=1}^4 2^{-k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k^2} < \sum_{k=1}^4 2^{-k^2} + \sum_{k=5}^{\infty} 2^{-k^2} < \sum_{k=1}^4 2^{-k^2} + \frac{1}{10^6}$$

となる。

$$\sum_{k=1}^4 2^{-k^2} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{16}} = 0.5644683837890625$$

より

$$0.564460 < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k^2} < 0.564469 + 0.000001 = 0.564470$$

となり、小数第4位までの値は0.5644である。 ■