解析学 I　レポート問題　解答例

$\boxed{1}$ 方程式 $x^2 = 2$ は $\mathbb{Q}$ の範囲で解をもたないことに注意したい．

(D1) $0 \in A_1$，$2 \in A_2$ であるから，$A_1 \neq \varnothing$，$A_2 \neq \varnothing$ である．定義より，$A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$ である．また，$A_1 \cap A_2$ の要素は，有理数であり，方程式 $x^2 = 2$ をみたさなければならないので，$A_1 \cap A_2 = \varnothing$ である．

(D2) $a \in A_1$，$b \in A_2$ を任意にとる．(i) $a < 0$ のときには，$b \geq 0$ より $a < b$ である．(ii) $a \geq 0$ のときには，$a^2 < 2 < b^2$ より $a < b$ となる．

以上より，(A_1, A_2) は $\mathbb{Q}$ の切断である．

$a = \max A_1$ が存在したとする．$1 \in A_1$ より $a \geq 1$，$a^2 \leq 2$ である．$a^2 < 2$ のときには，

$$h = \frac{2 - a^2}{2\,a + 1}$$

とおくと，$0 < h < 1$ であり，

$$(a+h)^2 - 2 = a^2 - 2 + 2\,a\,h + h^2 \leq a^2 - 2 + (2\,a + 1)\,h = 0$$

より $a + h \in A_1$ となり，a が A_1 の最大要素であること反する．したがって，$a \in \mathbb{Q}$ は $a^2 = 2$ をみたさなければならない．方程式 $x^2 = 2$ は $\mathbb{Q}$ の範囲で解をもたないので矛盾である．したがって，$\max A_1$ は存在しない．

$a = \min A_2$ が存在したとする．このとき，$a \geq 0$，$a^2 \geq 2$ である．$a^2 > 2$ のときには，

$$h = \frac{a^2 - 2}{2\,a}$$

とおくと，

$$a - h = \frac{a^2 + 2}{2\,a} > 0, \qquad (a-h)^2 - 2 = a^2 - 2 - 2\,a\,h + h^2 = h^2 > 0$$

より $a - h \in A_2$ となり，a が A_2 の最小要素であること反する．したがって，$a \in \mathbb{Q}$ は $a^2 = 2$ をみたさなければならない．方程式 $x^2 = 2$ は $\mathbb{Q}$ の範囲で解をもたないので矛盾である．したがって，$\min A_2$ は存在しない．

$\boxed{2}$ (A_1, A_2)，(B_1, B_2)，(C_1, C_2) を $\mathbb{Q}$ の切断とする．

(i) $A_1 \subset A_1$ より $(A_1, A_2) \leq (A_1, A_2)$ である．

(ii) $(A_1, A_2) \leq (B_1, B_2)$ かつ $(B_1, B_2) \leq (A_1, A_2)$ とする．定義より $A_1 \subset B_1$，$B_1 \subset A_1$ となり，$A_1 = B_1$ である．(A_1, A_2)，(B_1, B_2) は $\mathbb{Q}$ の切断であるから，

$$A_2 = \mathbb{Q} \setminus A_1 = \mathbb{Q} \setminus B_1 = B_2$$

である．したがって，$(A_1, A_2) = (B_1, B_2)$ である．

(iii) $(A_1, A_2) \leq (B_1, B_2)$ かつ $(B_1, B_2) \leq (C_1, C_2)$ とする．定義より $A_1 \subset B_1$，$B_1 \subset C_1$ となり，$A_1 \subset C_1$ である．したがって，$(A_1, A_2) \leq (C_1, C_2)$ である．

以上より，二項関係 $\leq$ は（半）順序関係である．

(A_1, A_2)，(B_1, B_2) を $\mathbb{Q}$ の任意の切断とする．$A_1 \not\subset B_1$ とする．このとき，$a \in A_1$，$a \notin B_1$ となる $a \in \mathbb{Q}$ が存在する．切断の定義とその性質より，$a \in B_2$ であり，すべての $b \in B_1 \subset \mathbb{Q}$ に対して $b < a$ であるから，$b \in A_1$ である．つまり，$B_1 \subset A_1$ である．$\mathbb{Q}$ の任意の切断 (A_1, A_2)，(B_1, B_2) に対して，$(A_1, A_2) \leq (B_1, B_2)$ または $(B_1, B_2) \leq (A_1, A_2)$ のいずれかが成り立つので，$\leq$ は全順序関係である．

$\boxed{3}$ $x \in \mathbb{R}$ を超えない最大の整数を $[x]$ と表すことにする．任意に $\varepsilon > 0$ をとり，$n_0 = [1/\varepsilon] + 1$ とおく．$n_0 > 1/\varepsilon$ であるから，$n \geq n_0$ をみたすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \frac{1+2\,n}{1+n} - 2 \right| = \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

となり，命題

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left(n \geq n_0 \Longrightarrow \left| \frac{1+2\,n}{1+n} - 2 \right| < \varepsilon \right)$$

が成り立つ．したがって，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1+2\,n}{1+n} = 2$$

である．

$\boxed{4}$ 数列 $\{\,a_n\,\}$，$\{\,b_n\,\}$ は収束するので有界である．したがって，ある $M \geq 0$ が存在して，$|\,a\,| \leq M$，$|\,b\,| \leq M$ であり，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|\,a_n\,| \leq M$，$|\,b_n\,| \leq M$ が成り立つ．このとき，一般性を失うことなく，$M \geq 1$ と仮定してよい．極限の定義より，命題

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left(n \geq n_1 \Longrightarrow |\,a_n - a\,| < \frac{\varepsilon}{2\,M} \right),$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left(n \geq n_2 \Longrightarrow |\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{2\,M} \right)$$

が成り立つ．$n_0 = \max(n_1, n_2)$ とおくと，すべての $n \geq n_0$ に対して，

$$|\,a_n - a\,| < \frac{\varepsilon}{2\,M}, \qquad |\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{2\,M}$$

であるから，三角不等式より

$$|\,(a_n + b_n) - (a + b)\,| \leq |\,a_n - a\,| + |\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon,$$
$$|\,a_n\,b_n - a\,b\,| \leq |\,(a_n - a)\ b_n\,| + |\,a\ (b_n - b)\,| \leq \frac{\varepsilon\,|\,b_n\,|}{2\,M} + \frac{\varepsilon\,|\,a\,|}{2\,M} < \varepsilon$$

が得られる．命題

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |\,(a_n + b_n) - (a + b)\,| < \varepsilon),$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |\,a_n\,b_n - a\,b\,| < \varepsilon)$$

が成り立つので，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b, \qquad \lim_{n\to\infty}a_n\,b_n=a\,b$$

である．