解析学 I (221700)　課題　解答例

2010.12.24

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

で定めるとき，定義に従って $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つことを示せ.

（解） すべての自然数 n に対して，$\sqrt{n^2+1} > 0$ であるから，a_n は

$$0 < a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n}$$

をみたすことに注意したい．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．ε と 1 に対してアルキメデスの原理を適用すると，ある自然数 n_0 が存在して $\varepsilon n_0 > 1$ が成り立つ．このとき，$n \geq n_0$ をみたすすべての自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$ より，

$$-\varepsilon < 0 < a_n < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{つまり} \qquad |a_n| < \varepsilon$$

が得られる．以上の議論から，命題

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \implies |a_n| < \varepsilon)$$

が成り立つので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．■