

解析学 (221700) 解答例

2010 年 10 月 20 日

- 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

に対して, $\inf A$ および $\sup A$ を求めよ.

(解) $a \leq 0$ なら, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \leq 0 < \frac{1}{n}$ が成り立つので, a は A の下界, つまり, $a \in L(A)$ である. 実数 x の整数部分を $[x]$ と表すことにする. $a > 1$ なら,

$$\left[\frac{1}{a} \right] \leq \frac{1}{a} < \left[\frac{1}{a} \right] + 1 \quad \Longrightarrow \quad a > \frac{1}{\left[\frac{1}{a} \right] + 1} \in A$$

が成り立つので, $a \notin L(A)$ である. 以上から, $L(A) = (-\infty, 0]$ であり, 定義より $\inf A = \max L(A) = 0$ となる.

$a < 1$ なら, $1 \in A$ より $a \notin U(A)$ である. $a \geq 1$ なら, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \geq \frac{1}{n}$ となるので, $a \in U(A)$ である. $U(A) = [1, +\infty)$ と定義より, $\sup A = \min U(A) = 1$ となる. ■

- 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B は上に有界であるとする. 集合 $A + B$ を

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$$

で定義するとき, $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ が成り立つことを示せ.

(解) $\alpha = \sup A, \beta = \sup B$ とおく. 上限の定義より

$$\forall a \in A (a \leq \alpha), \quad \forall b \in B (b \leq \beta)$$

が成り立つ. 任意の $x \in A + B$ に対して, 集合 $A + B$ の定義より $x = a + b$ となる $a \in A, b \in B$ が存在するので, $x = a + b \leq \alpha + \beta$ が成り立つ. したがって, $\alpha + \beta \in U(A + B)$ である. 上限の定義より

$$\sup(A + B) \leq \alpha + \beta = \sup A + \sup B$$

が得られる. ■