解析学　(221700)　解答例

2010 年 10 月 27 日

● 実数の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B は上に有界であるとする．集合 $A+B$ を

$$A+B=\{\, a+b \mid a\in A,\ b\in B \,\}$$

で定義するとき，$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$ が成り立つことを示せ．

(解) 前回，不等式 $\sup(A+B)\leq \sup A+\sup B$ を示している．$\alpha=\sup A$, $\beta=\sup B$, $\beta=\sup(A+B)$ とし，$\gamma<\alpha+\beta$ が成り立つと仮定する．$\ell=\alpha+\beta-\gamma$, $\varepsilon=\dfrac{\ell}{2}$ とおくと，$\varepsilon>0$ である．上限の定義より

$$\exists a\in A\ (\alpha-\varepsilon<a\leq\alpha)\,,\qquad \exists b\in B\ (\beta-\varepsilon<b\leq\beta)$$

が成り立つ．ε の定義を用いると

$$\gamma=\alpha+\beta-2\,\varepsilon<a+b\in A+B$$

となり，γ が集合 $A+B$ の上限であることに矛盾する．したがって，$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$ が成り立つ．■