解析学 I (221700)　解答例

2010 年 11 月 10 日

● ω は $\omega^2+\omega+1=0$ をみたす複素数とする．

(1) ω^{100} を ω で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3\,n} k\,\omega^k$ を ω と n で表せ．

（解） $\omega^3-1=(\omega-1)\left(\omega^2+\omega+1\right)$ より $\omega^3=1$ であることに注意したい．(1) $\omega^{100}=\omega^{33\cdot 3+1}=\left(\omega^3\right)^{33}\cdot\omega=\omega$ である．(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{3\,n} k\,\omega^k$ とおくと，

$$\begin{aligned}(1-\omega)\,S_n &= = S_n-\omega\,S_n=\sum_{k=1}^{3\,n} k\,\omega^k-\sum_{k=1}^{3\,n} k\,\omega^{k+1}=\sum_{k=1}^{3\,n} k\,\omega^k-\sum_{\ell=2}^{3\,n+1}(\ell-1)\,\omega^\ell\\ &=\sum_{k=1}^{3\,n} k\,\omega^k-\sum_{k=1}^{3\,n+1}(k-1)\,\omega^k=\sum_{k=1}^{3\,n}\{k-(k-1)\}\,\omega^k-3\,n\,\omega^{3\,n+1}\\ &=\sum_{k=1}^{3\,n}\omega^k-3\,n\,\omega^{3\,n+1}=\omega\cdot\frac{1-\omega^{3\,n}}{1-\omega}-3\,n\,\omega^{3\,n+1}=-3\,n\,\omega\end{aligned}$$

となる．したがって，$S_n=\dfrac{3\,n\,\omega}{\omega-1}$ である．■