解析学 I (221700)　解答例

2010 年 11 月 24 日

● $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x^n \leq a \,\}$，$s = \sup A$ とするとき，$s^n \leq a$ であることを示せ.

（解） $s^n > a$ を仮定する．正数 p，ε を

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k\, s^k, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}\, \min\left(1, s, \frac{|\, s^n - a\,|}{p}\right)$$

で定義する．明らかに $p > 1$，$0 < \varepsilon < 1/2$ である．$(-\varepsilon)^\ell \leq 1$ （$\ell \geq 0$）より

$$\begin{aligned}(s-\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, s^k\ (-\varepsilon)^{n-k} = -\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k\, s^k\ (-\varepsilon)^{(n-1)-k} + s^n \\ &\geq -\,\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k\, s^k + s^n \geq -\frac{|\, s^n - a\,|}{2\,p} \cdot p + s^n = \frac{s^n + a}{2} > a\end{aligned}$$

であるから，$0 < s - \varepsilon \notin A$ である．$x \geq s - \varepsilon$ なら，

$$x^n - (s-\varepsilon)^n = \{x - (s-\varepsilon)\} \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell\ (s-\varepsilon)^{(n-1)-\ell} \geq 0$$

より $x \notin A$ である．これは s が A の上限であることに反する．したがって，$s^n \leq a$ である． ■