解析学 I (221700)　解答例

2010 年 12 月 8 日

● $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A_n，B_n （$n \in \mathbb{N}$）を

$$A_n = \{\, (x, y) \mid x^n + y^n \leq 1 \,\}, \qquad B_n = \{\, (x, y) \mid |x|^n + |y|^n \leq 1 \,\}$$

で定義する．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $B_n \subset B_{n+1}$，$B_n \subset A_n$ が成り立つことを示せ．

（解） $(x, y) \in B_n$ を任意にとる．$|x|^n + |y|^n \leq 1$ より $|x| \leq 1$，$|y| \leq 1$ がみたされるので，$|x|^{n+1} \leq |x|^n$，$|y|^{n+1} \leq |y|^n$ となる．

$$|x|^{n+1} + |y|^{n+1} \leq |x|^n + |y|^n \leq 1$$

より $(x, y) \in B_{n+1}$ であるから，$B_{n+1} \subset B_n$ が成り立つ．また，n が偶数のときには $x^n = |x|^n$，$y^n = |y|^n$ であり，n が奇数のときには $x \leq |x|$，$y \leq |y|$ より $x^n \leq |x|^n$，$y^n \leq |y|^n$ である．

$$x^n + y^n \leq |x|^n + |y|^n \leq 1$$

より $(x, y) \in A_n$ となり，$B_n \subset A_n$ が得られる．■