解析学 I (221700)　解答例

2011 年 1 月 19 日

● $a \in \mathbb{R}$ とする．数列 $\{ a_n \}$ に対して，$\mathbb{N}$ の部分集合

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n < a \}, \qquad B = \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq a \}$$

の両方，または，いずれか一方は無限集合であることを示せ．

（解） 集合 A, B の定義より，$A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \varnothing$ が成り立つことに注意したい．集合 A, B は有限集合であると仮定すると，$A \cup B$ は有限集合となるが，$A \cup B = \mathbb{N}$ が無限集合であることに反する．したがって，集合 A, B 両方とも有限集合ではない．つまり，集合 A, B の両方，または，いずれか一方は無限集合である．■

● 区間 $[0, 1]$ から区間 $[0, 1)$ への全単射の例を示せ．

（解） 集合 A を $A = \{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0 \}$ で，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1,\ x \notin A) \\ \dfrac{x}{2} & (x \in A) \end{cases}$$

で定義する．$1 \in A$, $f(A) = A \setminus \{1\}$ であるから，$f(x)$ は区間 $[0, 1]$ から区間 $[0, 1)$ への全単射である．■