解析学 I (221700)　解答例

2011 年 1 月 26 日

● 辺 AB と辺 AC が等しい二等辺三角形 ABC に対して，辺 BC を 3 等分した分点を B，D，E，C とする．角 B が 30° のとき

$$\triangle\mathrm{DAB} \equiv \triangle\mathrm{EAC}, \qquad \triangle\mathrm{ABC} \propto \triangle\mathrm{DAB}$$

を示せ.

(解) 点 A から辺 BC におろした垂線と辺 BC の交点を H とする．

$$\mathrm{BA} = \mathrm{CA}, \qquad \mathrm{BD} = \mathrm{CE}, \qquad \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C} = 30^\circ$$

より $\triangle\mathrm{DAB} \equiv \triangle\mathrm{EAC}$ が成り立つので，$\mathrm{AD} = \mathrm{AE}$，$\angle\mathrm{ADH} = \angle\mathrm{AEH}$ が得られ，$\triangle\mathrm{ADH} \equiv \triangle\mathrm{AEH}$ である．点 D，E は辺 BC の 3 等分点であるから，$\mathrm{BD} = 2\,\mathrm{DH}$ が得られる．$\angle\mathrm{B} = 30^\circ$ より

$$\mathrm{AH} : \mathrm{AB} : \mathrm{BH} = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

であるから,

$$\mathrm{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{BH} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}\,\mathrm{BD}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{BD}$$

と三平方の定理より

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\,\mathrm{BD}^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{BD}^2} = \mathrm{BD}$$

が得られ，$\triangle\mathrm{DAB}$ は $\mathrm{AD} = \mathrm{BD}$ をみたす二等辺三角形である．$\angle\mathrm{B}$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DAB}$ に共通するので，$\triangle\mathrm{ABC} \propto \triangle\mathrm{DAB}$ である．■