●連立方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

が解をもつための必要十分条件を求めよ．

（解答例）　$n \times m$ 行列 A に対して $\mathrm{rank}A = \dim\{\, A\,\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\}$ であることに注意したい．

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$$

とおくと，$\mathrm{rank}A \leq \mathrm{rank}B \leq \mathrm{rank}A + 1$ である．また，連立方程式は $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ と表せることに注意する．連立方程式の解が存在するとすると，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の一次結合として表現できるので，

$$\{\, A\,\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\} = \{\, B\,\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\}$$

より $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$ となる．逆に，$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$ とすると，$\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の一次結合

$$\mathbf{b} = c_1\,\mathbf{a}_1 + c_2\,\mathbf{a}_2$$

と表すことができるので，$x = c_1$，$y = c_2$ が連立方程式の解である．以上のことから，連立方程式が解をもつための必要十分条件は $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$ である．