● $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 3 & (i = j) \\ -1 & (|i-j| = 1) \\ 0 & (|i-j| \geq 1) \end{cases}$$

で定義する．(1) $n = 3$ のとき A の固有値を求めよ．(2) $n = 4$ のとき A の固有値を求めよ．

（解答例）　(1) 3×3 行列の行列式の計算方法を用いて

$$\Phi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^3 - 2\,(\lambda - 3) = (\lambda - 3)\,\left\{(\lambda - 3)^2 - 2\right\}$$

と表されるので，固有値は 3，$3 - \sqrt{2}$，$3 + \sqrt{2}$ である．

(2) i 行と j 列を取り除いてできる $(n-1) \times (n-1)$ 行列を A_{ij} とし，$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ とおく．任意の ℓ に対して，余因子展開公式

$$\det A = a_{\ell 1}\,\Delta_{\ell 1} + a_{\ell 2}\,\Delta_{\ell 2} + \cdots + a_{\ell n}\,\Delta_{\ell n} \qquad \det A = a_{1\ell}\,\Delta_{1\ell} + a_{2\ell}\,\Delta_{2\ell} + \cdots + a_{n\ell}\,\Delta_{n\ell}$$

が成り立つことに注意したい．1 行目に対して余因子展開公式を用いると，

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) =& \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \\ =& (\lambda - 3)\,\det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \\ =& (\lambda - 3)^2\,\left\{(\lambda - 3)^2 - 2\right\} - \left\{(\lambda - 3)^2 - 1\right\} = (\lambda - 3)^4 - 3\,(\lambda - 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

と表される．

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (\lambda - 3)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \qquad |\lambda - 3| = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \end{aligned}$$

より，固有値は

$$\frac{7 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

である．