● $n=2$ のとき，$\|\mathbf{x}\|_1=1$，$\|\mathbf{x}\|_2=1$，$\|\mathbf{x}\|_3=1$，$\|\mathbf{x}\|_\infty=1$ を図示せよ．

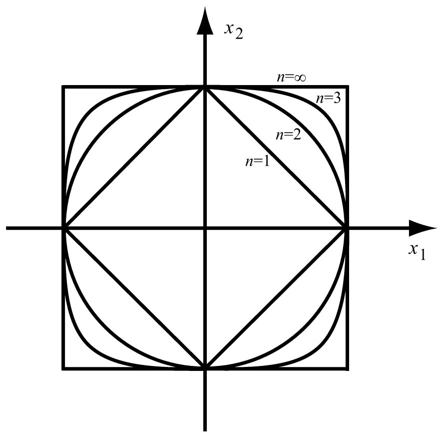
（解答例）　$n=2$ のときには，それぞれ

$$|x_1|+|x_2|=1, \qquad |x_1|^2+|x_2|^2=1, \qquad |x_1|^3+|x_2|^3=1, \qquad \max(|x_1|,|x_2|)=1 \qquad \text{(P)}$$

となる．(x_1,x_2) が (P) をみたせば $(-x_1,x_2)$，$(x_1,-x_2)$，$(-x_1,-x_2)$ も (P) をみたすので，第 1 象限で (P) をみたす曲線，つまり，

$$x_1+x_2=1, \qquad x_1^2+x_2^2=1, \qquad x_1^3+x_2^3=1, \qquad \max(x_1,x_2)=1$$

を用いて，x_1 軸と x_2 軸に対称に移すことにより，(P) をみたす曲線を求めることができる．



●任意の $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ に対して

$$\|\mathbf{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|x_k|$$

とするとき，$\|\mathbf{x}\|_1$ および $\|\mathbf{x}\|_\infty$ はノルムであることを示せ．

（解答例）　(i) 明らかに $\|\mathbf{x}\|_1\ge 0$，$\|\mathbf{x}\|_\infty\ge 0$ である．また，$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ のときには，定義より $\|\mathbf{x}\|_1=0$，$\|\mathbf{x}\|_\infty=0$ が成り立つ．逆に，$\|\mathbf{x}\|_1=0$ または $\|\mathbf{x}\|_\infty=0$ のとき，すべての $1\le k\le n$ に対して $|x_k|=0$，つまり，$x_k=0$ であるから，$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ である．(ii) 任意の $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$\|\alpha\mathbf{x}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|\alpha x_k|=\sum_{k=1}^{n}|\alpha||x_k|=|\alpha|\sum_{k=1}^{n}|x_k|=|\alpha|\|\mathbf{x}\|_1,$$
$$\|\alpha\mathbf{x}\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|\alpha x_k|=\max_{1\le k\le n}|\alpha||x_k|=|\alpha|\max_{1\le k\le n}|x_k|=|\alpha|\|\mathbf{x}\|_\infty$$

である．(iii) 任意の $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，すべての $1\le k\le n$ に対して $|x_k+y_k|\le|x_k|+|y_k|$，$|x_k|\le\|\mathbf{x}\|_\infty$，$|y_k|\le\|\mathbf{y}\|_\infty$ であるから，

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|\le\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)=\sum_{k=1}^{n}|x_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k|=\|\mathbf{x}\|_1+\|\mathbf{y}\|_1,$$
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty=\max_{1\le k\le n}|x_k+y_k|\le\max_{1\le k\le n}(|x_k|+|y_k|)\le\max_{1\le k\le n}(\|\mathbf{x}\|_\infty+\|\mathbf{y}\|_\infty)=\|\mathbf{x}\|_\infty+\|\mathbf{y}\|_\infty$$

である．したがって，$\|\mathbf{x}\|_1$ および $\|\mathbf{x}\|_\infty$ はノルムである．