● $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_p \le n^{\frac{1}{p}}\|\mathbf{x}\|_\infty$ であることを示せ.

（解答例）　$\|\mathbf{x}\|_\infty$ の定義より，(1) すべての $1 \le k \le n$ に対して $|x_k| \le \|\mathbf{x}\|_\infty$ であり，(2) ある $1 \le \ell \le n$ に対して $\|\mathbf{x}\|_\infty = |x_\ell|$ である.

$$\|\mathbf{x}\|_\infty^p = |x_\ell|^p \le \|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \le \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}\|_\infty^p = n\|\mathbf{x}\|_\infty^p$$

より，$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_p \le n^{\frac{1}{p}}\|\mathbf{x}\|_\infty$ が成り立つ.

● $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$ が成り立つことを示せ.

（解答例）　$\displaystyle\lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ が成り立つ[*1]ことに注意すると，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$ である.

[*1] (1) $n = 1$ のときには，$n^{\frac{1}{p}} = 1$ より，$\displaystyle\lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$ である．(2) $n > 1$ のときを考える．$n^{\frac{1}{p}} = 1 + \alpha_p$ をみたす $\alpha_p > 0$ が存在するので，

$$\frac{n}{p} = \frac{(1+\alpha_p)^p}{p} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p} {}_pC_k\,\alpha^k \ge \frac{{}_pC_1\,\alpha}{p} = \alpha_p > 0$$

が得られる．はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \alpha_p = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}(1+\alpha_p) = 1$ である.