● $x^2+y^2=1$ のもとで $z=5+8\,x\,y$ を最大にせよ．

（解答例１）　第 2 象限と第 4 象限では $x\,y \leq 0$ であり，第 1 象限と第 3 象限では $x\,y \geq 0$ であるから，最大値をとる (x,y) は第 1 象限と第 3 象限にある．まず，第 1 象限を考える．相加平均・相乗平均により

$$z \leq 5+8\cdot\frac{x^2+y^2}{2}=9$$

である．等号は $x=y$，つまり，

$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

のとき成り立つ．第 3 象限の場合には，$X=-x$，$Y=-y$ と変数変換することにより，(X,Y) は第 1 象限の点であり，問題は「$X^2+Y^2=1$ のもとで $z=5+8\,X\,Y$ を最大にせよ」となるので，第 1 象限での議論が適用できる．したがって，

$$(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\qquad\text{（複号同順）}$$

において，z は最大値 9 をとる．

（解答例２）　曲座標を用いると，$x^2+y^2=1$ をみたす (x,y) は $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$　$(0\leq\theta<2\,\pi)$ と表すことができるので，

$$z=5+8\,\cos\theta\,\sin\theta=5+4\,\sin 2\,\theta\leq 9$$

が得られる．ここで，等号は $\sin 2\theta=1$，つまり，$\theta=\pi/4$，$5\,\pi/4$ である．したがって，

$$(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\qquad\text{（複号同順）}$$

において，z は最大値 9 をとる．