●行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ を対角化せよ．

（解答例）　特性方程式

$$0=\det(\lambda E-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)^2-1=(\lambda-3)\,(\lambda-1)$$

より，A の固有値は $\lambda=1$ および $\lambda=3$ である．

(a) $\lambda=1$ に対応する A の固有ベクトルを $\mathbf{v}_1=(x_1,y_1)^T$ とすると，

$$\mathbf{0}=(A-E)\,\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ x_1+y_1\end{pmatrix}\qquad\Longleftrightarrow\qquad x_1+y_1=0$$

より，$\mathbf{v}_1=(1,-1)^T$ としてよい．

(b) $\lambda=3$ に対応する A の固有ベクトルを $\mathbf{v}_2=(x_2,y_2)^T$ とすると，

$$\mathbf{0}=(A-3\,E)\,\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-x_2+y_2\\ x_2-y_2\end{pmatrix}\qquad\Longleftrightarrow\qquad x_2-y_2=0$$

より，$\mathbf{v}_2=(1,1)^T$ としてよい．

行列 P を

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

で定義すると，

$$P^{-1}\,A\,P=P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

が得られる．