●行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．

（解答例）　特性方程式

$$0 = \det(\lambda\, E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1$$

より，$A$ の固有値は $\lambda = 1 + i$ および $\lambda = 1 - i$ である．

(a) $\lambda = 1 + i$ に対応する $A$ の固有ベクトルを $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)^T$ とすると，

$$\mathbf{0} = [A - (1+i)\,E]\,\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i\,x_1 - 2\,y_1 \\ \frac{1}{2}\,x_1 - i\,y_1 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad i\,x_1 + 2\,y_1 = 0$$

より，$\mathbf{v}_1 = (2, -i)^T$ としてよい．

(b) $\lambda = 1 - i$ に対応する $A$ の固有ベクトルを $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)^T$ とすると，

$$\mathbf{0} = [A - (1-i)\,E]\,\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i\,x_2 - y_2 \\ \frac{1}{2}\,x_2 + i\,y_2 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad i\,x_2 - 2\,y_2 = 0$$

より，$\mathbf{v}_2 = (2, i)^T$ としてよい．

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表されるので，行列 $Q$ を

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定義すると，

$$Q^{-1}\,A\,Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．