●行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ.

（解答例）　特性方程式

$$0 = \det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

より，A の固有値は $\lambda = 1$ （重解）である.

(a) $\lambda = 1$ に対応する A の固有ベクトルを $\mathbf{v} = (x, y)^T$ とすると，

$$\mathbf{0} = [A - E]\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2\,y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 0$$

より，$\mathbf{v} = (1, 0)^T$ としてよい.

(b) $(A - E)\,\mathbf{w} = \mathbf{v}$ をみたす $\mathbf{w} = (p, q)^T$ を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v} = [A - E]\,\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2\,q \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad q = \frac{1}{2}$$

より，$\mathbf{w} = (p, 1/2)^T$ である．$\mathbf{w}$ は $\mathbf{v}$ と一次独立になるように選べばよいので，$p = 0$ としてよい.

行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

で定義すると，

$$P^{-1}\,A\,P = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる.