● $|\,a\,| > |\,b\,|$，$|\,d\,| > |\,c\,|$ のとき，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値が含まれる範囲を求めよ．

（解答例）　集合 S，S_1，S_2 を $S = S_1 \cup S_2$，

$$S_1 = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid |\,a-\lambda\,| \le |\,b\,| \,\}, \qquad S_2 = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid |\,d-\lambda\,| \le |\,c\,| \,\}$$

で定義する．このとき，$S_1 \subset S$，$S_2 \subset S$ である．λ を A の任意の固有値とし，対応する固有ベクトルを $\mathbf{v} = (x, y)^T$ とすると，

$$\mathbf{0} = (A - \lambda\, E)\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (a-\lambda)\,x + b\,y \\ c\,x + (d-\lambda)\,y \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (a-\lambda)\,x = -b\,y, \\ (d-\lambda)\,y = -c\,x \end{cases}$$

となる．

(a) $|\,x\,| \le |\,y\,|$ の場合を考える．$\mathbf{v}$ が固有ベクトルであるから $|\,y\,| > 0$ となる．

$$|\,d-\lambda\,|\,|\,y\,| = |\,(d-\lambda)\,y| = |\,-c\,x\,| = |\,c\,|\,|\,x\,| \le |\,c\,|\,|\,y\,| \qquad \Longrightarrow \qquad |\,d-\lambda\,| \le |\,c\,|$$

より，$\lambda \in S_2$ である．

(b) $|\,y\,| < |\,x\,|$ の場合を考える．$|\,x\,| > 0$ と

$$|\,a-\lambda\,|\,|\,x\,| = |\,(a-\lambda)\,x| = |\,-b\,y\,| = |\,b\,|\,|\,y\,| \le |\,b\,|\,|\,x\,| \qquad \Longrightarrow \qquad |\,a-\lambda\,| \le |\,b\,|$$

より，$\lambda \in S_1$ である．

したがって，$\lambda \in S$ である．