● $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，$|\,a\,| > |\,b\,|$，$|\,d\,| > |\,c\,|$ を仮定する．

(1) $M_J = D^{-1}\,(E+F)$，$M_{GS} = (E+D)^{-1}\,F$ を求めよ．

(2) M_J と M_{GS} のスペクトル半径が 1 未満であることを示せ．

（解答例）　(1) 行列 D，E，F はそれぞれ

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$M_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{d} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{GS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a\,d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ 0 & -\frac{b\,c}{a\,d} \end{pmatrix}$$

となる．(2) M_J の特性方程式は

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{b}{a} \\ -\frac{c}{d} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{b\,c}{a\,d} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda^2 = \frac{b\,c}{a\,d}$$

であるから，

$$|\,\lambda\,|^2 = |\,\lambda^2\,| = \left| \frac{b\,c}{a\,d} \right| = \frac{|\,b\,|}{|\,a\,|} \cdot \frac{|\,c\,|}{|\,d\,|} < 1$$

より，すべての固有値の絶対値は 1 未満である．また，M_J の特性方程式は

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{b}{a} \\ 0 & \lambda + \frac{b\,c}{a\,d} \end{pmatrix} = \lambda \left(\lambda + \frac{b\,c}{a\,d} \right)$$

であるから，固有値は $\lambda = 0$ および $\lambda = -\dfrac{b\,c}{a\,d}$ であり，それらの絶対値は 1 未満である．したがって，M_J と M_{GS} のスペクトル半径は 1 未満である．