

● $z = a + ib$ のとき $|z| \geq \max(|a|, |b|)$ が成り立つことを示せ.

(解答例) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ より

$$|z| \geq \sqrt{a^2} = |a|, \quad |z| \geq \sqrt{b^2} = |b|$$

が成り立つので, $|z| \geq \max(|a|, |b|)$ が得られる.

● $|z| < 1, |w| < 1$ をみたす複素数 z, w に対して

$$(*) \quad \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| < 1$$

が成り立つことを示せ

(解答例) $|z|^2 = z\bar{z}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|^2 - 1 &= \frac{|z-w|^2 - |1-\bar{w}z|^2}{|1-\bar{w}z|^2} = \frac{(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) - (1-\bar{w}z)(1-w\bar{z})}{|1-\bar{w}z|^2} \\ &= \frac{(|z|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w + |w|^2) - (1 - z\bar{w} - \bar{z}w + |z|^2|w|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} \\ &= -\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} < 0 \end{aligned}$$

となるので, (*) が成り立つ.