●行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，ヤコビ法における係数行列 $M = -D^{-1}(E+F)$ の固有値を調べよ．

（解答例）　<u>A について：</u>　係数行列 M は

$$M = -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，特性方程式は

$$\det(\lambda I - M) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \lambda & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{2}{9}\right)$$

となる．固有値は 0，$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ であるから，ヤコビ法で連立方程式の近似解を求めることができる．

<u>B について：</u>　係数行列 M は

$$M = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，特性方程式は

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -3 & 1 \\ -3 & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda + 1$$

となる．

$$f(-4) = -27, \qquad f(-3) = 1, \qquad f(0) = 1, \qquad f(1) = -7, \qquad f(2) = -9, \qquad f(3) = 1$$

と中間値の定理より，

$$-4 < \lambda_1 < -3, \qquad 0 < \lambda_2 < 1, \qquad 2 < \lambda_3 < 3$$

をみたす固有値 λ_1，λ_2，λ_3 が存在する．この時点では，ヤコビ法で連立方程式の近似解を求めることができるかどうか分からない．