

●写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, (1) 「 f は単射である」および, (2) 「 f は全射である」の定義を述べよ.

(解答例) (1) 命題「 $\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$ 」が成り立つことである. 対偶を取ると, 「 $\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$ 」と対等である. (2) 命題「 $\forall y \in Y \exists x \in X (y = f(x))$ 」が成り立つことである.

●合成写像 $f \circ g$ が単射のとき, g はどのような写像か?

(解答例) $g(x_1) = g(x_2)$ とする. $f \circ g$ が単射であるとと

$$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2)$$

より, $x_1 = x_2$ である. したがって, g は単射である.