●すべての自然数 n，m，k に対して

$$\Psi_n(m+k) = \Psi_n(m) + \Psi_n(k) \tag{*}$$

が成り立つことを示せ．

（解答例）　$S(m)$ は

$$S(m) \overset{\text{加法の定義 (i)}}{=} S(\Phi_m(0)) \overset{\text{加法の定義 (ii)}}{=} \Phi_m(S(0)) \overset{\text{1 の定義}}{=} \Phi_m(1) = m+1$$

と表されることに注意すると，加法の定義 (ii) より

$$\Phi_n(S(m)) = S(\Phi_n(m)) \qquad \longleftrightarrow \qquad n+(m+1) = (n+m)+1 \tag{\#}$$

である．

n，m を任意にとり固定する．[I] $k=0$ のとき，

$$(\text{左辺}) = \Psi_n(m+0) \overset{\text{単位元}}{=} \Psi_n(m), \qquad (\text{右辺}) = \Psi_n(m) + \Psi_n(0) \overset{\text{乗法の定義 (i)}}{=} \Psi_n(m) + 0 \overset{\text{単位元}}{=} \Psi_n(m)$$

より，(*) が成り立つ．[II] $k=\ell$ のとき (*) が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}\Psi_n(m+S(\ell)) &\overset{(\#)}{=} \Psi_n(S(m+\ell)) \overset{\text{乗法の定義 (ii)}}{=} \Psi_n(m+\ell)+n \overset{\text{仮定}}{=} (\Psi_n(m)+\Psi_n(\ell))+n \\ &\overset{\text{結合法則}}{=} \Psi_n(m)+(\Psi_n(\ell)+n) \overset{\text{乗法の定義 (ii)}}{=} \Psi_n(m)+\Psi_n(S(\ell))\end{aligned}$$

となり，$k=S(\ell)$ のときも (*) が成り立つ．数学的帰納法より，すべての自然数 n，m，k に対して (*) が成り立つ．