●自然数 n，m に対して，

$$m < S(n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \leq n$$

が成り立つことを示せ．

（解答例）　($\Longrightarrow$)　$m < S(n)$ とする．このとき，$m \leq S(n)$ かつ $m \neq S(n)$ が成り立つ．$m \leq S(n)$ より，ある $k \in \mathbb{N}$ が取れて，$\Phi_k(m) = S(n)$ となる．$k = 0$ のときには，$m = \Phi_0(m) = S(n)$ となり，$m \neq S(n)$ に反する．したがって，$k \neq 0$ である．$\mathbb{N} = \{0\} \cup S(\mathbb{N})$ より $k \in S(\mathbb{N})$ であるから，$k = S(\ell)$ をみたす $\ell \in \mathbb{N}$ がとれる．S が単射であり，

$$S(n) = \Phi_k(m) \overset{\text{加法の交換法則}}{=} \Phi_m(k) = \Phi_m(S(\ell)) \overset{\text{加法の定義 (ii)}}{=} S(\Phi_m(\ell)) \overset{\text{加法の交換法則}}{=} S(\Phi_\ell(m))$$

が成り立つので，$n = \Phi_\ell(m)$ が得られる．$\ell \in \mathbb{N}$ より，$m \leq n$ である．

($\Longleftarrow$)　$m \leq n$ とする．このとき，ある $k \in \mathbb{N}$ が取れて，$\Phi_k(m) = n$ となる．$S(k) \neq 0$ と

$$S(n) = S(\Phi_k(m)) \overset{\text{加法の交換法則}}{=} S(\Phi_m(k)) \overset{\text{加法の定義 (ii)}}{=} \Phi_m(S(k)) \overset{\text{加法の交換法則}}{=} \Phi_{S(k)}(m)$$

より，$m \leq S(n)$ かつ $m \neq S(n)$ が成り立つ．したがって，$m < S(n)$ が得られる．