●次のように集合 $X=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上に二項関係 $\sim$ を定義するとき，$\sim$ は同値関係であることを示せ．

$$(n,m)\sim(k,\ell) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n+\ell=m+k$$

（解答例）　(i) $(n,m)\in X$ に対して，加法の交換法則により $n+m=m+n$ であるから，$(n,m)\sim(n,m)$ が成り立つ．(ii) $(n,m)\sim(k,\ell)$ とする．$n+\ell=m+k$ であるから，

$$k+m \overset{\text{交換}}{=} m+k \overset{\text{仮定}}{=} n+\ell \overset{\text{交換}}{=} \ell+n$$

となり, $(k,\ell)\sim(n,m)$ が成り立つ．(iii) $(n,m)\sim(k,\ell)$, $(k,\ell)\sim(u,v)$ とする．$n+\ell=m+k$, $k+v=\ell+u$ であるから,

$$(n+v)+(k+\ell) \overset{\text{結合・交換}}{=} (n+\ell)+(k+v) \overset{\text{仮定}}{=} (m+k)+(\ell+u) \overset{\text{結合・交換}}{=} (m+u)+(k+\ell)$$

が成り立ち，簡約法則より $n+v=m+u$ が得られる．したがって，$(n,m)\sim(u,v)$ が成り立つ．