● $(n, m) \sim (n', m')$ かつ $(k, \ell) \sim (k', \ell')$ のとき

$$(n\,k + m\,\ell, n\,\ell + m\,k) \sim (n'\,k' + m'\,\ell', n'\,\ell' + m'\,k')$$

であることを示せ.

（解答例）　(a) $n + m' = m + n'$ および (b) $k + \ell' = \ell + k'$ のもとで,

$$n\,k + m\,\ell + n'\,\ell' + m'\,k' = n\,\ell + m\,k + n'\,k' + m'\,\ell'$$

を示せばよい．ここで，(a) と (b) の左辺と右辺を入れ替えた関係式をそれぞれ (c) $m + n' = n + m'$ および (d) $\ell + k' = k + \ell'$ とすると，分配法則と交換法則より

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \times k : \qquad n\,k + k\,m' &= m\,k + k\,n', \\
\text{(c)} \times \ell : \qquad m\,\ell + \ell\,n' &= n\,\ell + \ell\,m', \\
\text{(b)} \times n' : \qquad k\,n' + n'\,\ell' &= \ell\,n' + n'\,k', \\
\text{(d)} \times m' : \qquad \ell\,m' + m'\,k' &= k\,m' + m'\,\ell'
\end{aligned}$$

となる．上式の左辺と右辺の和を求めると，交換法則より

$$\begin{aligned}
&n\,k + m\,\ell + n'\,\ell' + m'\,k' + k\,m' + \ell\,n' + k\,n' + \ell\,m' \\
&\qquad = n\,\ell + m\,k + n'\,k' + m'\,\ell' + k\,m' + \ell\,n' + k\,n' + \ell\,m'
\end{aligned}$$

が得られる．簡約法則より

$$n\,k + m\,\ell + n'\,\ell' + m'\,k' = n\,\ell + m\,k + n'\,k' + m'\,\ell'$$

が成り立つ.