● $\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\leqq$ を

$$[(n,m)] \leqq [(k,\ell)] \qquad \Longleftrightarrow \qquad n+\ell \leq m+k$$

で定義するとき，$\leqq$ は順序関係であることを示せ.

（解答例）　(i) $n+m=m+n \leq m+n$ と $\leqq$ の定義より $[(n,m)] \leqq [(n,m)]$ である．(ii) $[(n,m)] \leqq [(k,\ell)]$ かつ $[(k,\ell)] \leqq [(n,m)]$ を仮定する．$\leqq$ の定義より $n+\ell \leq m+k$，$k+m \leq \ell+n$ である．$\leq$ は全順序関係であるから，$n+\ell = m+k$ となる．同値関係 $\sim$ の定義より $(n,m) \sim (k,\ell)$ であるから，$[(n,m)] = [(k,\ell)]$ が得られる．(iii) $[(n,m)] \leqq [(k,\ell)]$ かつ $[(k,\ell)] \leqq [(p,q)]$ を仮定する．$\leqq$ の定義より $n+\ell \leq m+k$，$k+q \leq \ell+p$ である．

$$(n+q)+(k+\ell) = (n+\ell)+(k+q) \leq (m+k)+(k+q) \leq (m+k)+(\ell+p) = (m+p)+(k+\ell)$$

と簡約法則より，$n+q \leq m+p$ が得られる．$\leqq$ の定義より，$[(n,m)] \leqq [(p,q)]$ である．以上のことから，$\leqq$ は $\mathbb{Z}$ 上の順序関係である.