●有理数 $\langle (a_1, b_1) \rangle$，$\langle (a_2, b_2) \rangle$ に対して，加法と乗法を

$$\begin{aligned} &\text{加法：}\quad \langle (a_1, b_1) \rangle + \langle (a_2, b_2) \rangle = \langle (a_1\, b_2 + a_2\, b_1, b_1\, b_2) \rangle \\ &\text{乗法：}\quad \langle (a_1, b_1) \rangle \cdot \langle (a_2, b_2) \rangle = \langle (a_1\, a_2, b_1\, b_2) \rangle \end{aligned}$$

で定義するとき，代表元の取り方に依存せずにうまく定義できていることを示せ．

（解答例）　$\langle (a_1, b_1) \rangle \approx \langle (a_1', b_1') \rangle$，$\langle (a_2, b_2) \rangle \approx \langle (a_2', b_2') \rangle$ とする．定義より

$$a_1\, b_1' = a_1'\, b_1, \qquad a_2\, b_2' = a_2'\, b_2$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned} (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\,(b_1'\, b_2') =& (a_1\, b_1')\,(b_2\, b_2') + (a_2\, b_2')\,(b_1\, b_1') \\ =& (a_1'\, b_1)\,(b_2\, b_2') + (a_2'\, b_2)\,(b_1\, b_1') = (a_1'\, b_2' + a_2'\, b_1')\,(b_1\, b_2), \\ (a_1\, a_2)\,(b_1'\, b_2') =& (a_1\, b_1')\,(a_2\, b_2') = (a_1'\, b_1)\,(a_2'\, b_2) = (a_1'\, a_2')\,(b_1\, b_2) \end{aligned}$$

と定義より，

$$\langle (a_1\, a_2, b_1\, b_2) \rangle \approx \langle (a_1'\, a_2', b_1'\, b_2') \rangle, \qquad \langle (a_1\, b_2 + a_2\, b_1, b_1\, b_2) \rangle \approx \langle (a_1'\, b_2' + a_2'\, b_1', b_1'\, b_2') \rangle$$

が成り立ち，加法と乗法は代表元の取り方に依存せずにうまく定義できている．