解析学 I　解答例

2011.10.18

問題　$\mathbb{R}$ の部分集合 A を

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

で定義するとき，$\sup A$ を求めよ．

（解） 実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ と表すと，すべての実数 x に対して $x - 1 < [x] \leq x$ が成り立つことに注意したい．A の上界の集まりを U とする．(i) $c \geq 1$ なら，すべての自然数 n に対して

$$c \geq 1 > 1 - \frac{1}{n}$$

であるから，$c \in U$ である．(ii) $0 < c < 1$ のとき，自然数 n_0 を

$$n_0 = \left[\frac{1}{1-c} \right] + 1$$

で定義すると，$\dfrac{1}{1-c} < n_0$ より $c < 1 - \dfrac{1}{n_0} \in A$ が成り立ち，c は A の上界にならないので $c \notin U$ である．(iii) $c \leq 0$ のとき，$c < \dfrac{1}{2} \in A$ より c は A の上界にならないので，$c \notin U$ である．以上から，$U = [1, +\infty)$ となり，$\sup A = \min U = 1$ である．■