解析学 I　解答例

2011.11.01

問題　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定めるとき，$\{a_n\}$ の極限を求めよ．

（解） 特性方程式 $x = \sqrt{x+2}$ の解は $x = 2$ であるから，

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - 2| &= \left|\sqrt{a_n+2} - 2\right| = \left| \frac{\left(\sqrt{a_n+2} - 2\right)\left(\sqrt{a_n+2} + 2\right)}{\sqrt{a_n+2} + 2} \right| \\ &= \frac{|a_n - 2|}{\sqrt{a_n+2}+2} \le \frac{|a_n - 2|}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

より

$$|a_n - 2| \le \frac{|a_{n-1} - 2|}{2} \le \frac{|a_{n-2} - 2|}{2^2} \le \cdots \le \frac{|a_1 - 2|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が得られる．はさみうちの原理と

$$2 - \frac{1}{2^{n-2}} \le a_n \le 2 + \frac{1}{2^{n-2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ となる．■