解析学 I　解答例

2011.11.08

問題　$1 < \gamma < 2$ とする．数列 $\{ a_n \}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \gamma\, a_n\, (1 - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定めるとき，$\{ a_n \}$ の極限を求めよ．

（解） まず，すべての自然数 n に対して

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} < a_{n+1} < a_n \leq \frac{1}{2} \tag{E}$$

が成り立つことを示す．(i) $a_2 = \dfrac{\gamma}{4} < \dfrac{1}{2}$ および

$$a_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{(\gamma - 2)^2}{4\,\gamma} > 0$$

より，$n = 1$ のとき (E) が成り立つ．(2) $n = k$ のとき (E) が成り立つと仮定する．

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \gamma\, a_{k+1}\, (1 - a_{k+1}) - a_{k+1} = \gamma\, a_{k+1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} - a_{k+1} \right) < 0,$$

$$a_{k+2} = -\gamma \left(a_{k+1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\gamma}{4} > -\gamma \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\gamma}{4} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

より，$n = k + 1$ のときも (E) が成り立つ．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して (E) が成り立つ．数列 $\{ a_n \}$ は下に有界で単調減少な数列であるから，極限 $s = \lim_{n \to \infty} a_n$ が存在する．漸化式において $n \to \infty$ とすると，$s = \gamma\, s\, (1 - s)$ である．また，(E) において $n \to \infty$ とすると $s \geq \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} > 0$ であるから，$s = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}$ となる．■