解析学 I　解答例

2011.11.22

問題　$0 < \gamma < 1$ とする．数列 $\{ s_n \}$ を

$$s_n = 1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により定めるとき，$\{ s_n \}$ は基本列であることを示せ．

（解） 等比数列の和の公式より $s_n = \dfrac{1-\gamma^n}{1-\gamma}$ と表せることに注意したい．任意に $\varepsilon > 0$ をとり，

$$n_0 = \left[\frac{1}{\log \gamma} \, \log \frac{\varepsilon \, (1-\gamma)}{2} \right] + 1$$

とおく．このとき，

$$n_0 > \frac{1}{\log \gamma} \, \log \frac{\varepsilon \, (1-\gamma)}{2}$$

より $\dfrac{2 \, \gamma^{n_0}}{1-\gamma} < \varepsilon$ である．すべての n，$m \geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned} |\, s_n - s_m \,| &= \left| \frac{1-\gamma^n}{1-\gamma} - \frac{1-\gamma^m}{1-\gamma} \right| = \left| \frac{\gamma^m - \gamma^n}{1-\gamma} \right| = \frac{|\, \gamma^m - \gamma^n \,|}{1-\gamma} \\ &\leq \frac{\gamma^m + \gamma^n}{1-\gamma} \leq \frac{\gamma^{n_0} + \gamma^{n_0}}{1-\gamma} \leq \frac{2 \, \gamma^{n_0}}{1-\gamma} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\{ s_n \}$ は基本列である．■