解析学 II　解答例

2011.04.11

問題　関数 $f(t,x)$ を

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}}\,e^{-\frac{x^2}{2\,t}}$$

で定めるとき，極限 $\lim_{t\to+0} f(t,x)$ を求めよ．

（解）(i) $x=0$ のときには

$$\lim_{t\to+0} f(t,x) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}} = +\infty$$

である．(ii) すべての $z \geq 0$ に対して $e^z \geq z$ が成り立つことに注意したい．$x \neq 0$ のときには，はさみうちの原理と

$$0 \leq f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}\,e^{\frac{x^2}{2\,t}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}\cdot\dfrac{x^2}{2\,t}} = \frac{\sqrt{2\,t}}{\sqrt{\pi}\,x^2}$$

より，$\lim_{t\to+0} f(t,x) = 0$ である．■