# 解析学 II　解答例

2011.04.18

**問題**　関数 $f(x)$ を $x>0$ の範囲で

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

と定めるとき，$f(x)$ は単調増加関数かどうかを調べよ．

**(解)** 対数微分法を用いると，

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = [\log f(x)]' = \left[x\,\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]' = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

であり，すべての x > 0 に対して

$$g'(x) = -\frac{1}{x\,(1+x)^2} < 0$$

となる．$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ より，すべての $x>0$ に対して $g(x)>0$ である．したがって，すべての $x>0$ に対して $f'(x) = f(x)\,g(x) > 0$ が成り立つので，$f(x)$ は $x>0$ の範囲で単調増加関数である．■