解析学 II　解答例

2011.04.25

問題　関数 $f(x)$ を多項式とし，$f(0) = 0$ をみたすとする．このとき，極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin x)}{\sin f(x)}$$

を求めよ．

（解） $f(0) = 0$ より，$f(x)$ は n 次多項式で，$x = 0$ で k （$1 \leq k \leq n$）次の零点をもつ，つまり，

$$f(x) = \sum_{\ell=k}^{n} a_\ell \, x^\ell, \qquad a_k \neq 0$$

と表されると仮定してよい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin x)}{\sin f(x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(\sin x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin^k x \displaystyle\sum_{\ell=k}^{n} a_\ell \, \sin^{\ell-k} x}{x^k \displaystyle\sum_{\ell=k}^{n} a_\ell \, x^{\ell-k}} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^k \cdot \frac{\displaystyle\sum_{\ell=k}^{n} a_\ell \, \sin^{\ell-k} x}{\displaystyle\sum_{\ell=k}^{n} a_\ell \, x^{\ell-k}} \cdot \frac{f(x)}{\sin f(x)} \right\} = 1^k \cdot \frac{a_k}{a_k} \cdot 1 = 1$$

である．■