解析学 II　解答例

2011.05.02

問題　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

で定義するとき，すべての x，$y \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ が成り立つことを示せ．ここで，和の順序交換の妥当性は示さなくても良い．

(解) 二項定理を用いて，

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k\, y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right\}$$

となる．

$$A = \left\{ \, (n,k) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 0 \le k \le n \, \right\}, \qquad B = \left\{ \, (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; p \ge 0, q \ge 0 \, \right\}$$

とおき，B から A への変換 $k = p$，$n = p + q$ を考える．このとき，$f(x+y)$ において和をとる (n,k) は $(n,k) \in A$ であること，および，変換 $k = p$，$n = p + q$ は B から A への全単射であることに注意したい．$f(x+y)$ における和を (p,q) で表すと，

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{x^p}{p!} \cdot \frac{y^q}{q!} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \frac{x^p}{p!} \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^q}{q!} \right) \right\} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{x^p}{p!}\, f(y) \right) = f(x)\, f(y)$$

となる．■